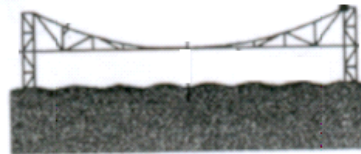


Indicaciones:

- Todos los materiales a utilizar durante la prueba son de uso individual.
 - Dispone de 10 minutos para hacer preguntas sobre la comprensión de los ejercicios.
 - El tiempo total para resolver la prueba es de 90 minutos.
 - Justifique todas sus respuestas.
 - Sea claro y ordenado en sus desarrollos.
 - Cada pregunta vale 15 puntos
 - De las preguntas **4 y 5** se contesta **sólo una**.
1. Grafique cada una de las regiones siguientes:
 - a. $A = \{(x, y) \in \mathbb{R} : x^2 + y^2 + 2x - 6y > -1\}$
 - b. $B = \{(x, y) \in \mathbb{R} : (y - 3)^2 + 8(x + 2) \geq 0\}$
 - c. $C = \{(x, y) \in \mathbb{R} : (x^2 + y^2 + 2x - 6y > -1) \vee (y - 3)^2 + 8(x + 2) \geq 0\}$
 2. Encuentre la ecuación de la recta L que es tangente al gráfico de la elipse de ecuación $x^2 + 2y^2 - 4y + 6x + 5 = 0$ en el punto $P = (-1, 0)$
 3. El área de un triángulo es $8[u^2]$. Dos de sus vértices son $A = (1, -2)$ y $B = (2, 3)$ y el tercer vértice C está sobre la recta $L : 2x + y = 2$. Determine las coordenadas de C .
 4. Identifique la ecuación del lugar geométrico A de todos los puntos en que su distancia al eje Y sea siempre el doble de su distancia al punto $(3, 2)$. De los elementos más importantes de la figura.
 5. Un cable de un puente suspendido tiene la forma de una parábola; las torres que soportan los cables distan $240[m]$ entre sí. El cable pasa sobre los apoyos a una altura de $30[m]$ sobre el piso y su punto más bajo está al nivel del mismo. Halle la longitud de los tirantes verticales que cuelgan del cable al puente a $40[m]$ del centro de los apoyos.



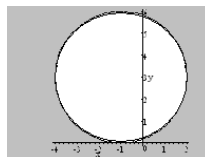
Desarrollo

1. Grafique cada una de las regiones siguientes:

a.

$$\begin{aligned} A &= \{(x,y) \in \mathbb{R} : x^2 + y^2 + 2x - 6y > -1\} \\ &= \{(x,y) \in \mathbb{R} : (x+1)^2 + (y-3)^2 > 9\} \end{aligned}$$

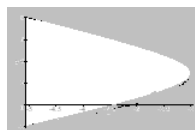
Su gráfica es:



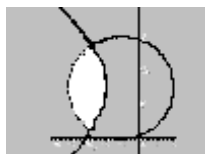
b.

$$B = \{(x,y) \in \mathbb{R} : (y-3)^2 + 8(x+2) \geq 0\}$$

Su gráfica es:



c. $C = \{(x,y) \in \mathbb{R} : (x^2 + y^2 + 2x - 6y > -1) \vee (y^2 - 6y + 8x \geq -25)\}$ Su gráfica es:



2. Encuentre la ecuación de la recta L que es tangente al gráfico de la elipse de ecuación $x^2 + 2y^2 - 4y + 6x + 5 = 0$ en el punto $P = (-1, 0)$

Sea $L : y = mx + b$. Como L pasa por P , tenemos que $0 = -m + b \Rightarrow b = m$. De este modo la recta es de ecuación $y = mx + m$.

Al intersectar la recta con la curva, se obtiene que:

$$\begin{aligned} x^2 + 2(mx + m)^2 - 4(mx + m) + 6x + 5 &= 0 \Leftrightarrow \\ (1 + 2m^2)x^2 + (4m^2 - 4m + 6)x + (2m^2 - 4m + 5) &= 0 \end{aligned}$$

Si la recta es tangente a la elipse, esta intersección da un sólo punto, por lo que el discriminante es 0. De este modo, obtenemos que:

$$\begin{aligned} (4m^2 - 4m + 6)^2 - 4(1 + 2m^2)(2m^2 - 4m + 5) &= 0 \Leftrightarrow \\ 16m^2 - 32m + 16 &= 0 \Leftrightarrow \\ (m - 1)^2 &= 0 \Leftrightarrow m = 1 \end{aligned}$$

De este modo, la ecuación de la recta pedida es: $L : y = x + 1$.

3. El área de un triángulo es $8[u^2]$. Dos de sus vértices son $A = (1, -2)$ y $B = (2, 3)$ y el tercer vértice C está sobre la recta $L : 2x + y = 2$. Determine las coordenadas de C .

Por determinar $C = (a, b)$

i) Notar que $C \in L$, entonces $b = 2 - 2a$

ii) Base del triángulo es

$$d(A, B) = \sqrt{(2-1)^2 + (3+2)^2} = \sqrt{26}$$

iii) La altura se tomará desde el vértice C hasta la recta L_2 , donde

$$L_2 : y - y_0 = m(x - x_0)$$

$$L_2 : 5x - y - 7 = 0$$

$$\begin{aligned} h = d((a, b); L_2) &= \frac{|5a - b - 7|}{\sqrt{26}} \\ &= \frac{|5a - (2 - 2a) - 7|}{\sqrt{26}} = \frac{|7a - 9|}{\sqrt{26}} \end{aligned}$$

iv) El área del triángulo

$$A = \frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2} = 8$$

$$A = \frac{\sqrt{26} * \frac{|7a - 9|}{\sqrt{26}}}{2} = 8$$

$$A = |7a - 9| = 16$$

$$\Rightarrow |7a - 9| = 16$$

$$\Rightarrow 7a - 9 = 16 \vee -(7a - 9) = 16$$

$$\Rightarrow a = \frac{25}{7} \vee a = -1$$

v) Finalmente la coordenada del punto es donde $b = 2 - 2a$

$$C = \left(\frac{25}{7}, 2 - 2 * \frac{25}{7} \right) \vee (-1, 4)$$

$$C = \left(\frac{25}{7}, -\frac{36}{7} \right) \vee (-1, 4)$$

4. Identifique la ecuación del lugar geométrico A de todos los puntos en que su distancia al eje Y sea siempre el doble de su distancia al punto $(3, 2)$. De los elementos más importantes de la figura.

$$\begin{aligned} A &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : d((x, y); Y) = 2d((x, y); (3, 2))\} \\ &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| = 2\sqrt{(x-3)^2 + (y-2)^2} \right\} \\ &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 = 4((x-3)^2 + (y-2)^2) \right\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 3x^2 - 24x + 52 + 4y^2 - 16y = 0\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 3(x-4)^2 + 4(y-2)^2 = -52 + 48 + 16\} \\ &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{(x-4)^2}{4} + \frac{(y-2)^2}{3} = 1 \right\} \end{aligned}$$

La figura es una elipse de centro en $C = (4, 2)$, Vértices $V_1 = (2, 2)$, $V_2 = (6, 2)$ y Focos $F_1 = (3, 2)$, $F_2 = (5, 2)$.

5. Un cable de un puente suspendido tiene la forma de una parábola; las torres que soportan los

cables distan $240[m]$ entre sí. El cable pasa sobre los apoyos a una altura de $30[m]$ sobre el piso y su punto más bajo está al nivel del mismo. Halle la longitud de los tirantes verticales que cuelgan del cable al puente a $40[m]$ del centro de los apoyos.

Ubiquemos el origen del sistema en el centro del piso del puente. De este modo, la parábola que se genera es vertical hacia arriba, de ecuación:

$$x^2 = 4cy$$

Como la parábola pasa por el punto $(120, 30)$, reemplazando en la ecuación obtenemos que:

$$(120)^2 = 4c(30) \Rightarrow c = 120$$

Es decir, la ecuación es de la forma:

$$x^2 = 480y$$

Así la longitud de los tirantes verticales que cuelgan del cable al puente a $40[m]$ del centro de los apoyos se calculan evaluando en la parábola cuando $x = 40$ y se obtiene que:

$$(40)^2 = 480y \Rightarrow y = \frac{10}{3}$$

La longitud de los tirantes es de $\frac{10}{3}[m]$.